

ЕКСТРАПОЛЯЦІЙНИЙ МЕТОД ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЙОГО ОБЧИСЛЮВАЛЬНА СТІЙКІСТЬ

Використовуючи новий підхід до побудови апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, побудовано новий чисельний метод екстраполяційного типу розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Встановлена ознака збіжності методу та його обчислювальна стійкість. Метод найбільш ефективний у випадку, коли функції, що замінюються неklasичними мажорантами Ньютона, є вгнутими.

Вступ

В [1], використовуючи апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично [2], побудовано новий однокроковий чисельний метод інтерполяційного типу розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, доведена його збіжність. В [3] проведено обґрунтування методу, встановлена його точність та мажорантна властивість. В [4] цей метод узагальнено для чисельного розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, встановлена ознака збіжності методу, в [5] показана його обчислювальна стійкість. Поряд із побудовою чисельних методів інтерполяційного типу розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і їх систем були розроблені чисельні методи екстраполяційного типу [6–8]. Однак усі ці побудовані чисельні методи (інтерполяційного та екстраполяційного типів) найбільш ефективні в тому випадку, коли функції, що замінюються неklasичними мажорантами Ньютона, є опуклими.

В [9] запропоновано інший підхід до побудови апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично. Використовуючи цей підхід, там же побудовано новий чисельний метод інтерполяційного типу розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, встановлено його збіжність та обчислювальну стійкість. З використанням цього ж апарату в [10] побудовано екстраполяційний метод чисельного розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь, встановлена ознака збіжності методу, показана його обчислювальна стійкість. Побудовані чисельні методи з використанням нового підходу до побудови апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, найбільш ефективні у випадку, коли функції, що замінюються неklasичними мажорантами Ньютона, є вгнутими.

В роботі, використовуючи новий підхід до побудови апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, побудовано чисельний метод екстраполяційного типу розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, встановлена ознака збіжності методу, показана його обчислювальна стійкість.

Постановка задачі

Розглянемо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (1)$$

$$y_i(x_0) = y_{i,0}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Нехай в області $\bar{D}$, яка визначається нерівностями

$$x_0 \leq x \leq x_0 + a, \quad |y_i - y_{i,0}| \leq b, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

функції $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, неперервні і задовольняють умову Ліпшиця за аргументами $y_1, y_2, \dots, y_n$ зі сталою L . Тоді в проміжку $[x_0, x_0 + c]$ задача Коші (1), (2) матиме єдиний розв'язок, де $c = \min(a, b/M)$, а M – стала, така, що для всіх $(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in \bar{D}$ $|f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq M$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Шукатимемо розв'язок задачі (1), (2) на проміжку $[x_0, x_0 + c]$. Для цього на проміжку $[x_0, x_0 + c]$ виберемо систему точок $x_0, x_1, \dots, x_m$, де $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \dots, m$, $h = c/m$, і, використовуючи новий підхід до побудови апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично [9], побудуємо чисельний метод екстраполяційного типу відшукування наближених значень $y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,m}$, $i = 1, 2, \dots, n$, точного

розв'язку $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, задачі (1), (2) в точках $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Новий чисельний метод

Нехай $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, – шуканий розв'язок задачі (1), (2). Підставляючи його в диференціальні рівняння, одержимо тотожності

$$y'_i(x) \equiv f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Проінтегруємо ці тотожності на кожному з проміжків $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Матимемо

$$y_i(x_{k+1}) = y_i(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, для всіх $x \in [x_0, x_0 + c]$.

Побудуємо для функцій $f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$, $i = 1, 2, \dots, n$, неklasичні мажоранти Ньютона $\tilde{M}_{f_i}(x)$ за двома точками $(x_{k-1}, f_i(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), \dots, y_n(x_{k-1})))$ і $(x_k, f_i(x_k, y_1(x_k), \dots, y_n(x_k)))$. Одержимо

$$\tilde{M}_{f_i}(x) = \ln \frac{e^{A_{i,k}}(x_k - x) + e^{B_{i,k}}(x - x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

де $A_{i,k} = f_i(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), \dots, y_n(x_{k-1}))$, $B_{i,k} = f_i(x_k, y_1(x_k), \dots, y_n(x_k))$. Замінивши підінтегральні функції $f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$ в (3) неklasичними мажорантами Ньютона (4), дістанемо

$$y_i(x_{k+1}) = y_i(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{M}_{f_i}(x) dx + R_{i,k+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

де $R_{i,k+1}$ – залишкові члени. Обчисливши при $A_{i,k} \neq B_{i,k}$, $i = 1, 2, \dots, n$, інтеграли, матимемо

$$\begin{aligned} y_i(x_{k+1}) = y_i(x_k) + h & \left(f_i(x_k, y_1(x_k), \dots, y_n(x_k)) - 1 + \right. \\ & + \frac{2 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), \dots, y_n(x_{k-1}))) - f_i(x_k, y_1(x_k), \dots, y_n(x_k)))}{1 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), \dots, y_n(x_{k-1}))) - f_i(x_k, y_1(x_k), \dots, y_n(x_k)))} \times \\ & \times \ln(2 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), \dots, y_n(x_{k-1}))) - f_i(x_k, y_1(x_k), \dots, y_n(x_k)))) + \\ & \left. + R_{i,k+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \right. \end{aligned}$$

Якщо $A_{i,k} = B_{i,k}$ для деякого $i = r$, то

$$y_r(x_{k+1}) = y_r(x_k) + hf_r(x_k, y_1(x_k), \dots, y_n(x_k)) + R_{r,k+1}.$$

Зазначимо, що на основі границі

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

одержимо

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), \dots, y_n(x_{k-1}))) - f_i(x_k, y_1(x_k), \dots, y_n(x_k)))}{1 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), \dots, y_n(x_{k-1}))) - f_i(x_k, y_1(x_k), \dots, y_n(x_k)))} \times \ln(2 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), \dots, y_n(x_{k-1}))) - f_i(x_k, y_1(x_k), \dots, y_n(x_k)))) = 1, \quad (5)$$

оскільки при $h \rightarrow 0$

$$f(x_k, y_1(x_k), \dots, y_n(x_k)) - f(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), \dots, y_n(x_{k-1})) \rightarrow 0.$$

Отже, для відшукування наближених значень $y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,m}$, $i = 1, 2, \dots, n$, розв'язку $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, задачі (1), (2) одержуємо формулу

$$\begin{aligned} y_{i,k+1} = y_{i,k} + h & \left(f_i(x_k, y_{1,k}, \dots, y_{n,k}) - 1 + \right. \\ & + \frac{2 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_{1,k-1}, \dots, y_{n,k-1})) - f_i(x_k, y_{1,k}, \dots, y_{n,k}))}{1 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_{1,k-1}, \dots, y_{n,k-1})) - f_i(x_k, y_{1,k}, \dots, y_{n,k}))} \times \\ & \left. \times \ln(2 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_{1,k-1}, \dots, y_{n,k-1})) - f_i(x_k, y_{1,k}, \dots, y_{n,k})) \right) \end{aligned} \quad (6)$$

де $k = 0, 1, \dots, m-1$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Ознакою збіжності методу є наступна теорема.

Теорема. Якщо в області $\bar{D}$, яка визначається нерівностями $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, $|y_i - y_{i,0}| \leq b$, $i = 1, 2, \dots, n$, функції $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, неперервні, задовольняють умову Ліпшиця зі сталою L за аргументами $y_1, y_2, \dots, y_n$

$$\left| \frac{df_i}{dx} \right| = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n} f_n \right| \leq N_i < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

де N_i – деякі сталі, то наближені значення $y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,m}$, $i = 1, 2, \dots, n$, знайдені за формулою (6), при $h \rightarrow 0$ рівномірно відносно x збігаються до точного розв'язку $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, задачі (1), (2).

Доведення теореми проводиться аналогічно як в [4].

Питання обчислювальної стійкості методу

Нехай $\tilde{y}_{i,0}$, $i = 1, 2, \dots, n$, – наближені значення точних початкових даних $y_{i,0}$, $i = 1, 2, \dots, n$, а $\varepsilon'_{i,0}$ – абсолютна похибка початкового наближення, тобто

$$\varepsilon'_{i,0} = |\tilde{y}_{i,0} - y_{i,0}|.$$

Тоді замість формули (6) для обчислення наближених значень розв'язку $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, задачі Коші (1), (2) в точках $x_1, x_2, \dots, x_m$ одержимо формулу

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{i,k+1} = & \tilde{y}_{i,k} + h(f_i(x_k, \tilde{y}_{1,k}, \dots, \tilde{y}_{n,k}) - 1 + \\ & + \frac{2 - \exp(f_i(x_{k-1}, \tilde{y}_{1,k-1}, \dots, \tilde{y}_{n,k-1}) - f_i(x_k, \tilde{y}_{1,k}, \dots, \tilde{y}_{n,k}))}{1 - \exp(f_i(x_{k-1}, \tilde{y}_{1,k-1}, \dots, \tilde{y}_{n,k-1}) - f_i(x_k, \tilde{y}_{1,k}, \dots, \tilde{y}_{n,k}))}) \times \\ & \times \ln(2 - \exp(f_i(x_{k-1}, \tilde{y}_{1,k-1}, \dots, \tilde{y}_{n,k-1}) - f_i(x_k, \tilde{y}_{1,k}, \dots, \tilde{y}_{n,k})))) \end{aligned}$$

$i = 0, 1, \dots, n-1$.

Якщо позначити

$$\varepsilon'_{i,k} = |\tilde{y}_{i,k} - y_{i,k}|, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

то

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{i,k+1} = & |\tilde{y}_{i,k+1} - y_{i,k+1}| = |(\tilde{y}_{i,k} - y_{i,k}) + h(f_i(x_k, \tilde{y}_{1,k}, \dots, \tilde{y}_{n,k}) - f_i(x_k, y_{1,k}, \dots, y_{n,k})) + \\ & + h\left(\frac{2 - \exp(f_i(x_{k-1}, \tilde{y}_{1,k-1}, \dots, \tilde{y}_{n,k-1}) - f_i(x_k, \tilde{y}_{1,k}, \dots, \tilde{y}_{n,k}))}{1 - \exp(f_i(x_{k-1}, \tilde{y}_{1,k-1}, \dots, \tilde{y}_{n,k-1}) - f_i(x_k, \tilde{y}_{1,k}, \dots, \tilde{y}_{n,k}))} \ln(2 - \exp(f_i(x_{k-1}, \tilde{y}_{1,k-1}, \dots, \tilde{y}_{n,k-1}) - f_i(x_k, \tilde{y}_{1,k}, \dots, \tilde{y}_{n,k}))) - \right. \\ & \left. - \frac{2 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_{1,k-1}, \dots, y_{n,k-1}) - f_i(x_k, y_{1,k}, \dots, y_{n,k}))}{1 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_{1,k-1}, \dots, y_{n,k-1}) - f_i(x_k, y_{1,k}, \dots, y_{n,k}))} \ln(2 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_{1,k-1}, \dots, y_{n,k-1}) - f_i(x_k, y_{1,k}, \dots, y_{n,k})))\right) \leq \\ & \leq \varepsilon'_{i,k} + h|f_i(x_k, \tilde{y}_{1,k}, \dots, \tilde{y}_{n,k}) - f_i(x_k, y_{1,k}, \dots, y_{n,k})| + \\ & + h\left(\frac{2 - \exp(f_i(x_{k-1}, \tilde{y}_{1,k-1}, \dots, \tilde{y}_{n,k-1}) - f_i(x_k, \tilde{y}_{1,k}, \dots, \tilde{y}_{n,k}))}{1 - \exp(f_i(x_{k-1}, \tilde{y}_{1,k-1}, \dots, \tilde{y}_{n,k-1}) - f_i(x_k, \tilde{y}_{1,k}, \dots, \tilde{y}_{n,k}))} \ln(2 - \exp(f_i(x_{k-1}, \tilde{y}_{1,k-1}, \dots, \tilde{y}_{n,k-1}) - f_i(x_k, \tilde{y}_{1,k}, \dots, \tilde{y}_{n,k}))) - \right. \\ & \left. - \frac{2 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_{1,k-1}, \dots, y_{n,k-1}) - f_i(x_k, y_{1,k}, \dots, y_{n,k}))}{1 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_{1,k-1}, \dots, y_{n,k-1}) - f_i(x_k, y_{1,k}, \dots, y_{n,k}))} \ln(2 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_{1,k-1}, \dots, y_{n,k-1}) - f_i(x_k, y_{1,k}, \dots, y_{n,k})))\right). \end{aligned}$$

Оскільки виконується (5), то

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - \exp(f_i(x_{k-1}, \tilde{y}_1(x_{k-1}), \dots, \tilde{y}_n(x_{k-1})) - f_i(x_k, \tilde{y}_1(x_k), \dots, \tilde{y}_n(x_k)))}{1 - \exp(f_i(x_{k-1}, \tilde{y}_1(x_{k-1}), \dots, \tilde{y}_n(x_{k-1})) - f_i(x_k, \tilde{y}_1(x_k), \dots, \tilde{y}_n(x_k)))} \times \\ & \times \ln(2 - \exp(f_i(x_{k-1}, \tilde{y}_1(x_{k-1}), \dots, \tilde{y}_n(x_{k-1})) - f_i(x_k, \tilde{y}_1(x_k), \dots, \tilde{y}_n(x_k)))) = 1, \\ & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), \dots, y_n(x_{k-1})) - f_i(x_k, y_1(x_k), \dots, y_n(x_k)))}{1 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), \dots, y_n(x_{k-1})) - f_i(x_k, y_1(x_k), \dots, y_n(x_k)))} \times \\ & \times \ln(2 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), \dots, y_n(x_{k-1})) - f_i(x_k, y_1(x_k), \dots, y_n(x_k)))) = 1. \end{aligned}$$

Тому

$$\frac{2 - \exp(f_i(x_{k-1}, \tilde{y}_1(x_{k-1}), \dots, \tilde{y}_n(x_{k-1})) - f_i(x_k, \tilde{y}_1(x_k), \dots, \tilde{y}_n(x_k)))}{1 - \exp(f_i(x_{k-1}, \tilde{y}_1(x_{k-1}), \dots, \tilde{y}_n(x_{k-1})) - f_i(x_k, \tilde{y}_1(x_k), \dots, \tilde{y}_n(x_k)))} \times \\ \times \ln(2 - \exp(f_i(x_{k-1}, \tilde{y}_1(x_{k-1}), \dots, \tilde{y}_n(x_{k-1})) - f_i(x_k, \tilde{y}_1(x_k), \dots, \tilde{y}_n(x_k)))) - 1 = \tilde{\delta}_{i,k}(h), \\ \frac{2 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), \dots, y_n(x_{k-1})) - f_i(x_k, y_1(x_k), \dots, y_n(x_k)))}{1 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), \dots, y_n(x_{k-1})) - f_i(x_k, y_1(x_k), \dots, y_n(x_k)))} \times \\ \times \ln(2 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), \dots, y_n(x_{k-1})) - f_i(x_k, y_1(x_k), \dots, y_n(x_k)))) - 1 = \delta_{i,k}(h),$$

де $\tilde{\delta}_{i,k}(h) \rightarrow 0$ і $\delta_{i,k}(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Отже,

$$\varepsilon'_{i,k+1} \leq \varepsilon'_{i,k} + h \left| f_i(x_k, \tilde{y}_{1,k}, \dots, \tilde{y}_{n,k}) - f_i(x_k, y_{1,k}, \dots, y_{n,k}) \right| + h \left| \tilde{\delta}_{i,k}(h) - \delta_{i,k}(h) \right|.$$

Функція $f(x, y_1, \dots, y_n)$ задовольняє умову Ліпшиця за аргументами $y_1, \dots, y_n$, тому

$$\varepsilon'_{i,k+1} \leq \varepsilon'_{i,k} + Lh \sum_{j=1}^n \left| \tilde{y}_{j,k} - y_{j,k} \right| + h \left| \tilde{\delta}_{i,k}(h) - \delta_{i,k}(h) \right|,$$

або

$$\varepsilon'_{i,k+1} \leq \varepsilon'_{i,k} + Lh \sum_{j=1}^n \varepsilon'_{j,k} + h \bar{\delta}_{i,k}(h), \quad i = 0, 1, \dots, n-1; \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

де $\bar{\delta}_{i,k}(h) = \left| \tilde{\delta}_{i,k}(h) - \delta_{i,k}(h) \right|$. При цьому $\bar{\delta}_{i,k}(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Нехай $\max_{1 \leq s \leq n} \varepsilon'_{s,k} = \varepsilon'_k$, $\max_{1 \leq i \leq n} \bar{\delta}_{i,k}(h) = \bar{\delta}_k(h)$, $k = 1, 2, \dots, m$. Тоді

$$\varepsilon'_{k+1} \leq (1 + nhL) \varepsilon'_k + h \bar{\delta}_k(h), \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \varepsilon'_1 &\leq (1 + Lhn) \varepsilon'_0 + h \bar{\delta}_0(h); \\ \varepsilon'_2 &\leq (1 + Lhn) \varepsilon'_1 + h \bar{\delta}_1(h) \leq (1 + Lhn)^2 \varepsilon'_0 + h \left((1 + Lhn) \bar{\delta}_0(h) + \bar{\delta}_1(h) \right); \\ \varepsilon'_3 &\leq (1 + Lhn) \varepsilon'_2 + h \bar{\delta}_2(h) \leq \\ &\leq (1 + Lhn)^3 \varepsilon'_0 + h \left((1 + Lhn)^2 \bar{\delta}_0(h) + (1 + Lhn) \bar{\delta}_1(h) + \bar{\delta}_2(h) \right); \\ &\dots \dots \dots \\ \varepsilon'_m &\leq (1 + Lhn)^m \varepsilon'_0 + h \left((1 + Lhn)^{m-1} \bar{\delta}_0(h) + (1 + Lhn)^{m-2} \bar{\delta}_1(h) + \dots + \bar{\delta}_{m-1}(h) \right). \end{aligned}$$

Якщо позначити

$$\max_{0 \leq i \leq m-1} \bar{\delta}_i(h) = \delta(h),$$

то

$$\varepsilon'_m \leq (1 + Lhn)^m \varepsilon'_0 + h \delta(h) \left((1 + Lhn)^{m-1} + (1 + Lhn)^{m-2} + \dots + 1 \right),$$

або

$$\varepsilon'_m \leq (1 + Lhn)^m \varepsilon'_0 + \frac{1}{Ln} \delta(h) \left((1 + Lhn)^m - 1 \right).$$

Оскільки при $u > 0$ виконується нерівність $e^u > 1 + u$ і $mh = c$, то

$$\varepsilon'_m \leq e^{Ln hm} \varepsilon'_0 + \frac{1}{Ln} \delta(h) \left(e^{Ln hm} - 1 \right),$$

або

$$\varepsilon'_m \leq e^{Lnc} \varepsilon'_0 + \frac{1}{Ln} \delta(h) \left(e^{Lnc} - 1 \right).$$

Із одержаної нерівності випливає, що похибка початкових даних не нагромаджується, тобто метод має обчислювальну стійкість.

Висновки

Використовуючи новий підхід до побудови апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, побудовано чисельний метод екстраполяційного типу розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, встановлена ознака збіжності методу та його обчислювальна стійкість. Метод найбільш ефективний у випадку, коли функції, що замінюються неklasичними мажорантами Ньютона, є вгнутими. Ідея розробки чисельних методів на основі обох підходів до побудови апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій може бути успішно використана для розробки двобічних чисельних методів.

Список використаних джерел

1. Цегелик Г. Г., Федчишин Н. В. Інтерполяційний метод мажорантного типу розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Техн. науки. – 2002. – № 2. – С. 37 – 43.
2. Цегелик Г. Г. Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн. – 1989. – 41, № 9. – С. 1273 – 1276.
3. Грипинська Н. Нелінійний, неявний, однокроковий чисельний метод розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформатика. – 2002. – Вип. 4. – С. 23 – 29.
4. Цегелик Г. Г. Нелінійний, неявний, однокроковий чисельний метод розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь // Прикладні проблеми механіки і матем. – 2005. – Вип. 3. – С. 21 – 27.
5. Глебена М. І., Цегелик Г. Г. Про обчислювальну стійкість інтерполяційного методу мажорантного типу розв'язування задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформатика. – 2008. – Вип. 16 – С. 53 – 56.
6. Цегелик Г., Підківка Л., Федчишин Н. Екстраполяційний метод мажорантного типу розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформатика. – 2002. – Вип. 4. – С. 76 – 82.
7. Підківка Л., Цегелик Г., Грипинська Н. Про точність екстраполяційного методу мажорантного типу розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформатика. – 2003. – Вип. 6. – С. 86 – 89.
8. Фундак Л., Цегелик Г. Екстраполяційний метод мажорантного типу розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформатика. – 2005. – Вип. 10. – С. 41 – 48.
9. Фундак Л. І., Цегелик Г. Г. Новий підхід до побудови апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій та його застосування // Волинський матем. вісн. Сер. прикл. математика. – 2005. – Вип. 3 (12). – С. 186 – 200.
10. Цегелик Г. Г., Лещишин Н. Р. Екстраполяційний метод чисельного розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь // Волинський матем. вісн. Сер. прикл. матем. – 2008. – Вип. 5 (14). – С. 265 – 276.